ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ (ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ) ΦΥΣΙΚΟ-ΧΗΜΙΚΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ

ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ:

Μοντελοποίηση λέγεται η διαδικασία εκείνη που θα μας οδηγήσει στην ανάπτυξη ενός μαθηματικού προτύπου (σετ μαθηματικών εξισώσεων) που θα περιγράφει (προσομοιάζει) με το δυνατόν καλύτερη ακρίβεια τη συμπεριφορά ενός φυσικο-χημικού φαινομένου/συστήματος. Το μαθηματικό αυτό μοντέλο μπορεί κατόπιν να χρησιμοποιηθεί για πρόβλεψη της συμπεριφοράς του φαινομένου/συστήματος σε αλλαγές των μεταβλητών, την βελτιστοποίηση και τον έλεγχο της λειτουργίας του, την καλύτερη κατανόησή του, κλπ

Καλό είναι ένα μοντέλο όταν:

- Η προβλέψεις του έχουν κατά το δυνατόν μικρό σφάλμα σε σχέση με την πραγματική συμπεριφορά του φαινομένου/συστήματος.
- Είναι η απλούστερη δυνατή προσέγγιση της πραγματικής συμπεριφοράς, χωρίς να βλάπτεται ουσιωδώς η ακρίβειά του. Έχουν απομακρυνθεί από τις εξισώσεις οι παράμετρες εκείνες που δημιουργούν ιδιαίτερες δυσκολίες στην επίλυση χωρίς να έχουν σημαντική συνεισφορά στις προβλεπόμενες τιμές. Αυτό επιτυγχάνεται εύστοχες υποθέσεις απλοποίησης.
- Το μοντέλο έχει μια γενικότητα, και μπορεί να περιγράψει όσο το δυνατόν περισσότερα παρόμοια φαινόμενα χωρίς ιδιαίτερες αλλαγές.
- Επιλύεται εύκολα, αναλυτικά ή στη περίπτωση αναγκαίας χρήσης Η/Υ (μετά από εφαρμογή μεθόδων αριθμητικής ανάλυσης για την λύση του συστήματος των μαθηματικών εξισώσεων) χωρίς την απαίτηση υπέρογκου χρόνου υπολογιστή (CPU time)

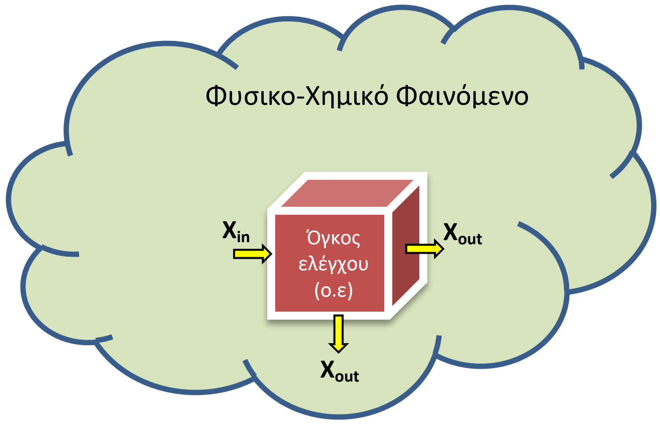
Η πορεία ανάπτυξης ενός μαθηματικού μοντέλου (προτύπου) από το φυσικο-χημικό πρότυπο μπορεί να ακολουθήσει (σε γενικές γραμμές) τα παρακάτω βασικά βήματα.

1. Επιλογή του κατάλληλου όγκου ελέγχου (ο.ε.) ή μάζας ελέγχου (μ.ε.):

Για την μαθηματική μοντελοποίηση θα χρειαστούμε ένα χώρο ή μία μάζα του φαινομένου/συστήματος που θα εφαρμοστούν τα «**μαθηματικά εργαλεία**» που διαθέτει ο μηχανικός. Αυτά είναι οι **αρχές διατήρησης** (μάζας, ενέργειας, ορμής, στροφορμής, ηλεκτρικού φορτίου) και οι αναγκαίες επιπρόσθετες **καταστατικές εξισώσεις** ώστε το μαθηματικό πρότυπο που θα δημιουργηθεί να μπορεί να λυθεί (ίδιος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων εξισώσεων και μεταβλητών).

Η επιλογή του ο.ε. ή της μ.ε. είναι αυθαίρετη (Σχήμα 1) , αλλά συχνά η δυνατότητα και η ευκολία ανάπτυξης (εφαρμογή των μαθηματικών εργαλείων) ενός εύχρηστου και ικανοποιητικού μαθηματικού προτύπου εξαρτάται σημαντικά από αυτή την επιλογή. Εδώ παίζει μεγάλη σημασία η εμπειρία του Μηχανικού και η οξυδέρκεια του.

Το ίδιο σημαντικό και συνυφασμένο με την παραπάνω επιλογή είναι και η επιλογή των συντεταγμένων που θα εφαρμοστούν οι εξισώσεις (καρτεσιανές, κυλινδρικές ή σφαιρικές). Σχετίζεται άμεσα με την «γεωμετρία» του προς επίλυση προβλήματος.



Σχήμα 1: *εικονική αναπαράσταση ενός φυσικοχημικού φαινομένου και η επιλογή ο.ε. στον οποίο θα εφαρμοστούν οι αρχές διατήρησης.*

2. Επιλογή μεταβλητών και εφαρμογή των απαραίτητων αρχών διατήρησης (ισοζυγίων):

Έχοντας ορίσει τον κατάλληλο ο.ε. και επιλέξει τις μεταβλητές εκείνες που αντιλαμβανόμαστε ότι θα επηρεάζουν/καθορίζουν το φαινόμενο/σύστημα, εφαρμόζουμε τις απαραίτητες μόνο (όχι αυτές που δεν σχετίζονται με τις μεταβλητές του φαινομένου) αρχές διατήρησης με εστιασμένη την προσοχή μας στα όρια του ο.ε (το περίγραμμα της εξωτερικής επιφάνειάς του).

Η αρχή διατήρησης (λέγονται και ισοζύγια) για μια ποσότητα Χ (Χ= μάζα, ενέργεια, ορμή, ηλεκτρικό φορτίο) έχει γενικά ως ακολούθως:

«Η ολική ποσότητα Χ που περιέχεται στον ο.ε. τη χρονική στιγμή t_2 (>t_1) ισούται με την ολική ποσότητα Χ που περιέχεται στον ο.ε. τη χρονική στιγμή t_1, συν την ολική ποσότητα Χ που εισέρχεται στον ο.ε. τη χρονική στιγμή t_1 έως t_2, μείον την ολική ποσότητα Χ που εξέρχεται από τον ο.ε. την ίδια χρονική διάρκεια».

Η πρόταση αυτή εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

$$X)_{t_2} = X)_{t_1} + X_{in}(t_1, t_2) - X_{out}(t_1, t_2) \qquad (1)$$

Σε περίπτωση διανυσματικού μεγέθους Χ (ορμή, στροφορμή), και σε αντίθεση με την περίπτωση μονόμετρου μεγέθους (μάζα, ενέργεια, ηλεκτρικό φορτίο), η εξίσωση 1 μπορεί και πρέπει να γραφεί για κάθε συνιστώσα διεύθυνση ξεχωριστά.

Η εξίσωση 1 μετατρέπετε σε διαφορική εξίσωση εάν διαιρέσουμε τον κάθε όρο της με t_2-t_1 με πάρουμε το όριο (lim) για $t_2 \rightarrow t_1$ ($dt=t_2-t_1 \rightarrow 0$):

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X}_{in} - \dot{X}_{out} \tag{2}$$

όπου $\dot{X}_{in}$ και $\dot{X}_{out}$ εκφράζουν την «παροχή» ή «ρυθμό ροής» εισόδου και εξόδου της ποσότητας X, αντίστοιχα.

Μια γενικότερη έκφραση της εξ. (2) από την οποία μπορούμε να ξεκινάμε για την εφαρμογή της αρχής διατήρησης του X, η οποία θα περιλαμβάνει και την περίπτωση αλλά της X σε κάτι άλλο εντός του ο.ε., πχ μετατροπής της μάζας συστατικού A σε B λόγω αντίδρασης, είναι η:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Ρυθμός}\\ \text{συσσώρευσης}\\ \text{της X στον ο.ε.}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{Ρυθμός εισόδου}\\ \text{(παροχή) της X}\\ \text{στον ο.ε.}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{Ρυθμός εξόδου}\\ \text{(παροχή) της X}\\ \text{από τον ο.ε.}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{Ρυθμός}\\ \text{μετατροπής της X}\\ \text{στον ο.ε.}\end{matrix}\right\} \tag{3}$$

Για παράδειγμα, γράφοντας την εξ. (3) σε μαθηματική μορφή για την μάζα (m σε mol) κάποιου συστατικού A ενός συστήματος (και όχι για την ολική μάζα), όπου το A μετατρέπεται εντός του συστήματος σε κάποιο άλλο συστατικό λόγω αντίδρασης με ένα ρυθμό αντίδρασης r_A (mol/cm^3s), παίρνουμε:

$$\frac{dm_A}{dt} = \dot{m}_{A_{in}} - \dot{m}_{A_{out}} - V \cdot r_A \tag{4}$$

όπου V (cm^3) ο ο.ε. εντός του οποίου γίνεται η αντίδραση μετατροπής του A σε άλλο συστατικό. Η εξίσωση 4 λέγεται και «μερικό» ισοζύγιο μάζας συστατικού A.

Η εξίσωση (3) εκφρασμένη για την ολική ενέργεια ($X=E_{ΟΛ}$) ενός συστήματος, όπου στην γενική περίπτωση ενδέχεται να περιλαμβάνει και χημική αντίδραση (που συνοδεύεται με παραγωγή ή κατανάλωση θερμότητας που δίνεται μέσω της θερμοδυναμική ποσότητας «μεταβολής ενθαλπίας της αντίδρασης» ΔH σε cal/mol), είναι η παρακάτω:

$$\frac{dE_{O\Lambda}}{dt} = \dot{E}_{O\Lambda_{in}} - \dot{E}_{O\Lambda_{out}} - V \cdot r_A(\Delta H) \tag{5}$$

Παρατηρήσεις:

(i) Για την περίπτωση που X είναι η ολική μάζα X ενός συστήματος η εξ. (2) ισχύει πάντα αρκεί να μην έχουμε μετατροπή μάζας σε ενέργεια ($E=mc^2$), ενώ η αντίστοιχη (3) στερείται του τελευταίου όρου (εφόσον ακόμα και αν η μάζα μετατραπεί σε άλλο συστατικό παραμένει ίδια σε ποσότητα).

(ii) Ο πρώτος όρος της εξ. (3), δηλ. η συσσώρευση, μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Θα είναι μηδέν στην περίπτωση συστήματος που λειτουργεί σε **Μόνιμη Κατάσταση** (Μ.Κ.), όπερ και σημαίνει ότι «οι παράμετρες του συστήματος δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο».

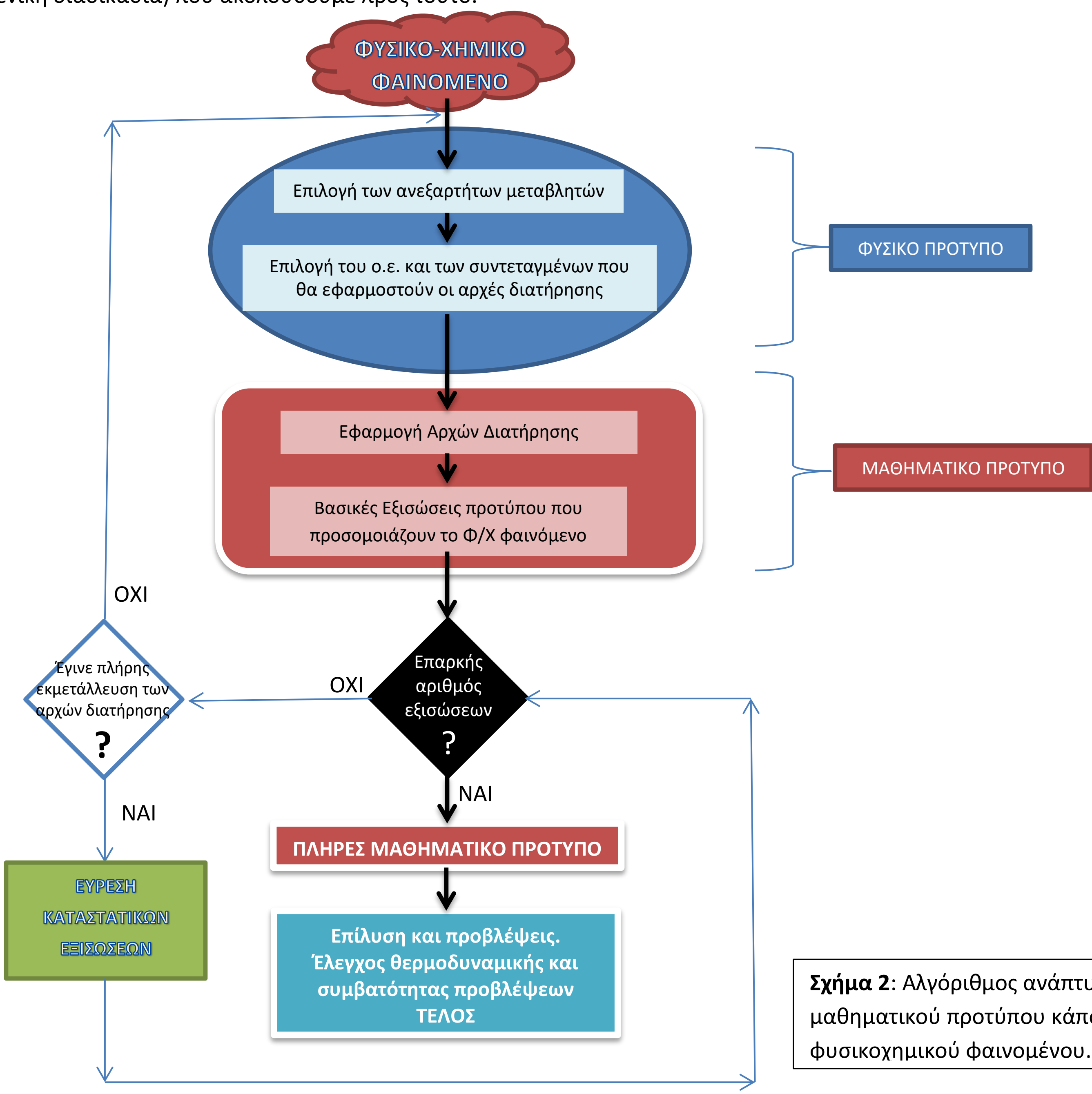
Ερώτηση: *Η Μόνιμη Κατάσταση σημαίνει και θερμοδυναμική ισορροπία ενός συστήματος? Είναι η θερμοδυναμική ισορροπία μόνιμη κατάσταση?*

3. Αναζήτηση «καταστατικών» εξισώσεων:

Εάν μετά την εφαρμογή των αναγκαίων αρχών διατήρησης, το μαθηματικό μοντέλο παραμένει αόριστο, δηλαδή ο αριθμός των εξισώσεων δεν είναι επαρκής σε σχέση με τις άγνωστες μεταβλητές του συστήματος ώστε το σύστημα των εξισώσεων να έχει λύση, τότε για να μπορέσει να λυθεί θα πρέπει να εμπλουτιστεί με πρόσθετες εξισώσεις, που τις ονομάζουμε «καταστατικές εξισώσεις» (constitutive equations).

- *Οι καταστατικές εξισώσεις είναι σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις εξαρτημένες μεταβλητές του προβλήματος και δεν πηγάζουν από τις μακροσκοπικές αρχές διατήρησης.*
- *Στις περισσότερες περιπτώσεις προκύπτουν πειραματικά.*
- *Υπάρχει μια μαθηματική μεθοδολογία, η «**διαστατική ανάλυση**», που μπορεί να μας βοηθήσει στην αναζήτηση των κατάλληλων καταστατικών εξισώσεων. (Περιγραφή σε επόμενο κεφάλαιο).*

Ένα παράδειγμα καταστατικής εξίσωσης είναι η γνωστή μας των ιδανικών αερίων (PV=nRT) η οποία όπως θυμόμαστε προέκυψε από πειράματα των πεφωτισμένων Gay-Lussac, Boyle Mariotte, Avogadro… Μετά την παραπάνω συνοπτική ανάπτυξη της πορείας προς τη μαθηματική προσομοίωση (μοντελοποίηση) ενός φυσικοχημικού φαινομένου, είμαστε σε θέση να δώσουμε έναν **αλγόριθμο** (μια γενική διαδικασία) που ακολουθούμε προς τούτο:



Σχήμα 2: Αλγόριθμος ανάπτυξης μαθηματικού προτύπου κάποιου φυσικοχημικού φαινομένου.

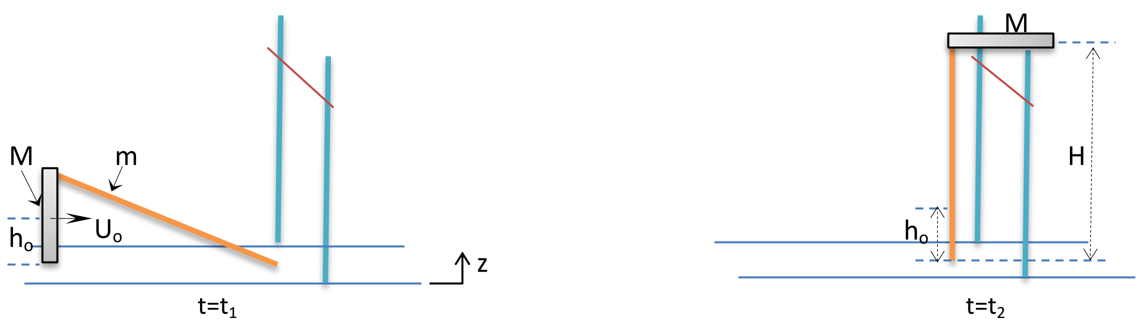
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

ΠΑΡΑΔΗΓΜΑ 1. Μοντελοποίηση του άλματος επικοντιστή. Που μπορεί να φθάσει το παγκόσμιο ρεκόρ? Θεωρήστε μη-ελαστικό κοντάρι ασήμαντου βάρους σε σχέση με το βάρος του επικοντιστή.

ΛΥΣΗ:

Το πραγματικό φυσικό πρόβλημα (φαινόμενο) προς μαθηματική προσομοίωση είναι το παρακάτω:

Το ανάλογο Φυσικό πρότυπο:



Με βάση το Φυσικό πρότυπο εφαρμόζω την αρχή διατήρησης της ολικής ενέργειας (εξ. 5) στις χρονικές στιγμές t_1 και t_2:

$$\frac{dE_{O\Lambda}}{dt} = \cancelto{0}{\dot{E}_{O\Lambda in}} - \cancelto{0}{\dot{E}_{O\Lambda out}} - V \cdot \cancelto{0}{r_A(\Delta H)} \Rightarrow \frac{dE_{O\Lambda}}{dt} = 0 \Rightarrow \; dE_{O\Lambda} = 0dt \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dE_{O\Lambda} = 0 \Rightarrow E_{O\Lambda}|_{t1}^{t2}=0$$

$E_{O\Lambda}|_{t2}-E_{O\Lambda}|_{t1}=0 \rightarrow [(M+m)gz + ½\,(M+m)U^2]_{t2} - [(M+m)gz + ½\,(M+m)U^2]_{t1} = 0 \rightarrow$

$[MgH + 0] - Mgh_o + ½\,MU_o^2 = 0 \rightarrow$ $H = h_o + U_o^2/2g$

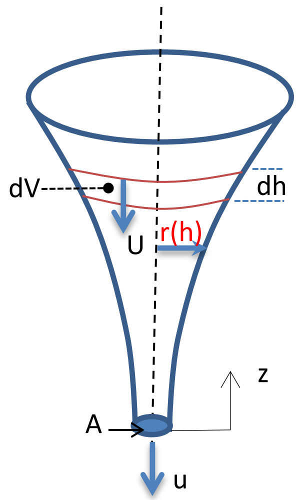
Γνωρίζουμε: $U_o \sim 10$ m/s (η ταχύτητα ενός εκατοστάρη), $h_o \sim 1$m, $g=9.81$ m/s^2 άρα: H = 6.10 m

(Ο ολυμπιονίκης μας ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ έκανε 5.58 m !!!!).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Αρχαίο Αιγυπτιακό ρολόι (κλεψύδρα νερού). Δοχείο με αξονική συμμετρία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ρολόι (Σχήμα Π2). Το δοχείο είναι γεμάτο με νερό που εξέρχεται από τον πυθμένα διατομής A (cm2), και έχει τοίχωμα κατάλληλου σχήματος ώστε να δίνεται η δυνατότητα στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού να κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα U (λειτουργία ρολογιού). Εάν είναι γνωστή η ταχύτητα εκροής από τη διατομή του πυθμένα $v=(2gh)^{1/2}$, βρείτε:

(i) Ποια πρέπει να είναι η μορφή των τοιχωμάτων (δηλαδή τη συνάρτηση r(h)) ώστε να λειτουργεί σωστά το ρολόι.

(ii) Πόσος είναι ο όγκος του νερού (V) που χρειάζεται για λειτουργία n ωρών?



Σχήμα Π2: Αιγυπτιακό ρολόι νερού

ΛΥΣΗ:

(i)

Όγκος ελέγχου ≡ όγκος νερού. Το ισοζύγιο μάζας με βάση τον ο.ε. δίνει:

$$\frac{dm}{dt} = \overset{0}{\dot{m}_{in}} - \dot{m}_{out} \xrightarrow{m=\rho V\,,\ \ \dot{m}=\rho F} \frac{d\rho V}{dt} = -\rho F \rightarrow \frac{dV}{dt} = -F = -A\cdot u = -A(2g)^{1/2}\cdot h^{1/2} \rightarrow \frac{dV}{dt} = -A\sqrt{2g}\, h^{1/2} \quad (1)$$

Παρατηρήστε ότι μας χρειάζεται η εξάρτηση V=V(h) ή το dV/dt

Έστω ότι τη χρονική περίοδο dt το ύψος μεταβλήθηκε κατά dh (βλέπετε σχήμα Π2). Εάν θεωρήσουμε ότι ο διαμορφούμενος όγκος dV έχει προσεγγιστικά κυλινδρικό σχήμα (αυτό είναι ΠΑΝΤΑ αλήθεια στο βαθμό που dh→0), τότε:

$$dV = \pi r^2(h)\cdot dh \rightarrow \frac{dV}{dt} = \pi r^2(h)\frac{dh}{dt} \quad (2)$$

(Παρατήρηση: Την εξίσωση (2) μπορούμε να την χρησιμοποιούμε γενικά, ανεξαρτήτως του σχήματος των τοιχωμάτων του δοχείου, πχ κωνικό, κυλινδρικό κλπ)

Από (1)$\xrightarrow{(2)}$ $\pi r^2(h)\frac{dh}{dt} = -A\sqrt{2g}\,h^{1/2}$ (3).

Όμως παρατηρήστε ότι $\frac{dh}{dt} = -U$ που πρέπει να είναι σταθερό εφόσον θέλουμε λειτουργία ρολογιού (να κατέρχεται δηλαδή η ελεύθερη επιφάνεια του νερού με σταθερή ταχύτητα). Οπότε:

(3)→ $-\pi r^2(h)U = -A\sqrt{2g}\,h^{1/2} \rightarrow r(h) = \left(\frac{A}{\pi U}\right)^{\frac{1}{2}}(2g)^{1/4}\,h^{1/4}$ (4)

Η εξ. (4) σου δίνει το σχήμα που πρέπει να έχουν τα τοιχώματα του δοχείου για να είναι ρολόι νερού.

(ii)

Για να βρούμε τον απαιτούμενο όγκο νερού V_n ώστε το ρολόι να λειτουργεί για n ώρες, αρκεί να σκεφτούμε ότι αυτός θα είναι ο όγκος που θα εξέλθει από το ρολόι σε n ώρες:

Ξεκινώντας από την (1) που την είχαμε σε ενδιάμεσο στάδιο γράψει ως $\frac{dV}{dt} = -Au$ και ολοκληρώνοντας την διαφορική αυτή εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών βάζοντας τα κατάλληλα όρια ολοκλήρωσης, έχουμε:

$$\frac{dV}{dt} = -Au \rightarrow dV = -Audt \xrightarrow{\int} \int_0^{V_n} dV = -A\int_n^0 udt \Rightarrow V|_0^{V_n} = -A(2g)^{1/2}\int_n^0 h^{1/2}dt \Rightarrow$$

$$V_n = -A(2g)^{1/2}\int_n^0 h^{1/2}dt \quad (5)$$

Για να μπορέσουμε να ολοκληρώσουμε το δεύτερο σκέλος της (5) προφανώς χρειαζόμαστε την εξάρτηση h(t) ή ίσως καλύτερα την εξάρτηση dh και dt. Αλλά dh/dt=-U ή dt=-dh/U, οπότε:

$$(5) \rightarrow V_n = -A(2g)^{\frac{1}{2}}\int_n^0 h^{\frac{1}{2}}dt \xrightarrow{dt=-\frac{dh}{U}} A(2g)^{\frac{1}{2}}\int_0^{h_o}\frac{h^{\frac{1}{2}}}{U}dh \Rightarrow V_n = \frac{2}{3}A\frac{(2g)^{\frac{1}{2}}}{U}h^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{h_0} \Rightarrow V_n = \frac{2}{3}A\frac{(2g)^{\frac{1}{2}}}{U}h_0^{3/2} \quad (6)$$

Όμως

$$\frac{dh}{dt} = -U \Rightarrow dh = -Udt \overset{\int}{\Longrightarrow} \int_{h_o}^0 dh = -\int_0^n Udt \Rightarrow h_0 = Un \quad (7)$$

Από (6) και (7) παίρνουμε τελικά:

$$V_n = \frac{2}{3}A(2g)^{1/2}U^{1/2}n^{3/2}$$

ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ-

ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Η γραφή των μαθηματικών εξισώσεων που περιγράφουν ένα φυσικοχημικών φαινόμενο (δηλ. το μαθηματικό πρότυπο) με αδιάστατο τρόπο, δηλαδή με τρόπο όπου κάθε όρος μιας εξίσωσης δεν θα έχει διαστάσεις έχει πολλά πλεονεκτήματα στη Χημική Μηχανική. Βέβαια, υποτίθεται ότι στην αρχική της μορφή η εξίσωση έχει ελεγχθεί και όλοι οι όροι της (τμήματά της) έχουν ίδιες διαστάσεις. Αυτός είναι ένα πρώτος έλεγχος της ορθότητας μιας εξίσωσης που αν δεν επαληθεύεται σημαίνει ότι η εξίσωση δεν είναι εκ των προτέρων σωστή, αλλά στην αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή επαληθεύεται δεν σημαίνει εκ προοιμίου ότι η εξίσωση είναι σωστή.

Τα πλεονεκτήματα παρουσίασης των εξισώσεων σε αδιάστατη μορφή είναι:

1. Εύκολος έλεγχος της ορθότητας.
2. Μείωση των μεταβλητών που πρέπει να γνωρίζουμε για να έχουμε αντίληψη της συμπεριφοράς του συστήματος (εφόσον πολλές μεταβλητές ομαδοποιούνται σε αδιάστατες παράμετρες οι οποίες είναι πλέον οι νέες μεταβλητές του προβλήματος)
3. Ταυτόχρονος έλεγχος της επίδρασης πολλών αρχικών παραμέτρων από ένα μόνο διάγραμμα
4. Οι αδιάστατοι αριθμοί που επηρεάζουν ένα σύστημα έχουν κάνει αυτούς που τους εισήγαγαν διάσημους (πχ Reynold, Arrhenius, Damkohler, Thiele, Froude, Prandtl, Sherwood, κλπ).

Η ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ μας παρέχει ένα συστηματικό τρόπο αναζήτησης καταστατικών εξισώσεων σε αδιάστατη μορφή για τη διαμόρφωση ενός πλήρους μαθηματικού πρότυπου, όταν δεν επαρκεί προς τούτο ο αριθμός των εξισώσεων που θα προκύψουν από τις αρχές διατήρησης. Η διαδικασία θα μας δώσει συνδυασμό ενός αριθμού αδιάστατων μεταβλητών (δηλ. αδιάστατων ομάδων από τις βασικές παράμετρες του φαινομένου) που επηρεάζουν το φαινόμενο. Η αναλυτική (ποσοτική) σύνδεση αυτών των αδιάστατων ομάδων θα βρεθεί βεβαίως από το πείραμα, γι’ αυτό λέγονται και ημι-εμπειρικές εξισώσεις).

Η διαδικασία βασίζεται στο **θεώρημα του Buckinham** το οποίο συνοπτικά εκφράζεται ως:

Εάν

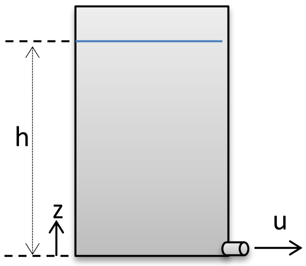
n: ο αριθμός των διαστατικών παραμέτρων (φυσικών μεταβλητών) που επηρεάζουν ένα σύστημα

D: τα βασικά φυσικά μεγέθη (πχ L = μήκος, M = μάζα, T = χρόνος, Q = ηλεκτρικό φορτίο) που οι διαστάσεις τους εμφανίζονται στις παραπάνω φυσικές μεταβλητές, τότε

Η διαφορά G = n-D καθορίζει τον αριθμό των αδιάστατων ομάδων που θα εμπεριέχει η προς αναζήτηση καταστατική εξίσωση.

Για την καλύτερη κατανόηση της μεθοδολογίας της διαστατικής ανάλυσης θα την περιγράψουμε σε παραδείγματα (βλέπετε παρακάτω) παρά να δώσουμε την θεωρητική της περιγραφή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Εύρεση καταστατικής εξίσωσης για την ταχύτητα εκροής (u) στη διαδικασία αποστράγγισης μιας δεξαμενής νερού:



Αναζητούμε μια εξίσωση της μορφής u = u(h).

1. Από πόσες φυσικές μεταβλητές (διαστατικές παράμετρες) επηρεάζεται το πρόβλημα?
   Είναι οι: u(cm/s), h(cm), g(cm/s^2) → Σύνολο **n = 3**

2. Ποια τα βασικά φυσικά μεγέθη που υπεισέρχονται?
   L (μήκος), T (χρόνος) → Σύνολο **D = 2**

3. Η διαφορά G = n-D = 3-2 = 1. Εφόσον G = 1, η προς αναζήτηση καταστατική εξίσωση θα έχει μια αδιάστατη ομάδα.

4. u h g

   (LT^{-1}) (L) (LT^{-2})

5. Διαμορφώνουμε το γινόμενο
   $\Pi = u^{\alpha 1}h^{\alpha 2}g^{\alpha 3}$ όπου θέλουμε το Π να είναι αδιάστατο, άρα:
   $\Pi = (LT^{-1})^{\alpha 1}(L)^{\alpha 2}(LT^{-2})^{\alpha 3} = L^0T^0 \rightarrow L^{(\alpha 1+\alpha 2+\alpha 3)}T^{(-\alpha 1-2\alpha 3)} = L^0T^0 \rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1=\alpha_2+\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1-2\alpha_3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_2 = \alpha_3 \\ \alpha_1 = -2\alpha_3 \end{array}\right.$$

Επιστρέφοντας στο Π

$\Pi = u^{-2\alpha 3}h^{\alpha 3}g^{\alpha 3} = (u^{-2}hg)^{\alpha 3}$

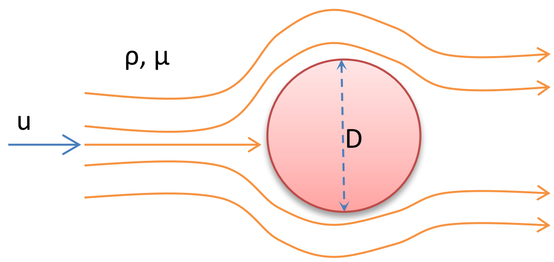
Άρα η σχέση $u^{-2}hg = N_o$ πρέπει να είναι μια καταστατική εξίσωση του προβλήματος →

$u^2 = (1/N_o)hg \rightarrow u = (1/N_o)^{1/2}h^{1/2}g^{1/2}$ ή $u = A\, g^{1/2}h^{1/2}$

όπου το Α θα πρέπει να προσδιοριστεί πειραματικά. Θα διαπιστώσουμε ότι $A = \sqrt{2}$, οπότε $\boldsymbol{u = \sqrt{2gh}}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Έστω σφαίρα εντός της ροής κάποιου ρευστού (ρ, μ). Η δύναμη F (οπισθέλκουσα) που θα εξασκείται από το ρευστό στη σφαίρα θα εξαρτάται από την ταχύτητα του ρευστού (u), την πυκνότητα (ρ) και το ιξώδες (μ) του ρευστού καθώς και από τη διάμετρο της σφαίρας (D).
Δηλαδή F = f(ρ, u, D, μ).
Βρείτε τις αδιάστατες ομάδες που επηρεάζουν το φαινόμενο.

ΛΥΣΗ:



ΒΗΜΑ 1: Φυσικές μεταβλητές του προβλήματος:

F u D ρ μ → n=5

ΒΗΜΑ 2: βασικά φυσικά μεγέθη:

M (Μάζα), L(μήκος), T(χρόνος) → D=3

ΒΗΜΑ 3: G = n-D = 5-3 = 2 → ψάχνουμε για 2 αδιάστατες ομάδες

ΒΗΜΑ 4:	F	u	D	ρ	μ
	(MLT^{-2})	(LT^{-1})	(L)	(ML^{-3})	$(ML^{-1}T^{-1})$

ΒΗΜΑ 5: Διαμορφώνουμε το γινόμενο Π που το θέλουμε αδιάστατο, δηλ. $M^0L^0T^0$:

$$\Pi = F^{a1}u^{a2}D^{a3}\rho^{a4}\mu^{a5} = (MLT^{-2})^{a1}(LT^{-1})^{a2}(L)^{a3}(ML^{-3})^{a4}(ML^{-1}T^{-1})^{a5} = M^0L^0T^0 \rightarrow$$

$$\Pi = M^{a1+a4+a5}L^{a1+a2+a3-3a4-a5}T^{-2a1-a2-a5} = M^0L^0T^0 \rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &M:\ a1+a4+a5 = 0 \\ &L:\ a1+a2+a3-3a4-a5 = 0 \\ &T:\ -2a1-a2-a5 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} &a4 = -a1-a5 \\ &a2 = -2a1-a5 \\ &a3 = -2a1-a5 \end{aligned}\right\}$$

Και ξαναγυρνώντας στο Π

$$\Pi = F^{-a1}u^{-2a1-a5}D^{-2a1-a5}\rho^{-a1-a5}\mu^{a5} = (F/u^2D^2\rho)^{a1}(uD\rho/\mu)^{-a5}$$

Πρέπει λοιπόν να ψάξουμε (πειραματικά) για τον προσδιορισμό μιας σχέσης που συνδέει αυτά τα δυο αδιάστατα γκρουπ, της μορφής:

$$\frac{F}{u^2D^2\rho} = f(\frac{uD\rho}{\mu})$$

Παρατήρηση: Ο αδιάστατος αριθμός $\frac{uD\rho}{\mu} = Re$ είναι ο περιβόητος αριθμός Reynolds που εμφανίζεται σε όλα τα προβλήματα ροής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (προς λύση): Ρευστό (ρ, μ) ρέει μέσα σε κυλινδρικό αγωγό. Οι παράμετρες που επηρεάζουν την πτώση πίεσης (ΔP) κατά μήκος του αγωγού, εκτός από τα χαρακτηριστικά του ρευστού ρ και μ, είναι η μέση ταχύτητα u, το μήκος του αγωγού l και η διάμετρος του D, καθώς και ένα μέγεθος e που έχει διαστάσεις μήκους και το ονομάζουμε τραχύτητα της επιφάνειας. Να βρεθούν οι αδιάστατες ομάδες που επηρεάζουν το φαινόμενο.